Mathématiques : Suites

Soit (Un) une suite de réels, on dit que :

$-(Un)\ est\ croissante\ ;\ lorsque\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$

$-(Un)\ est\ décroissante\ ;\ lorsque\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$

$-(Un)\ est\ constante\ ;\ lorsque\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n$

Pour étudier les variations d'une suite, on peut étudier :

$-(U_{n+1} - U_n)\ et\ comparer\ cette\ valeur$ à 0

$-\frac{U_{n+1}}{U_n}\ et\ comparer\ cette\ valeur\ avec\ 1$

$-Si\ U_n = f(n), étudier\ les\ variations\ de\ f$

Suite bornée :

Soit (Un) une suite numérique :

$U_n\ est\ majorée\ si :\ \exists\ M \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$

$U_n\ est\ minorée\ si :\ \exists\ m \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$

$U_n\ est\ bornée\ si :\ \exists\ (m, M) \in \mathbb{R}^2\ /\ \forall n \in \mathbb{N}, m \leq U_n \leq M$

Suites Arithmétiques :

Soit (Un) une suite numérique :

$(U_n)\ est\ arithmétique\ si :\ \exists r \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r$
$r\ est\ appelée\ la\ raison\ de\ la\ suite$

$$Si\ (U_n) est\ arithmétique :$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + r = U_p + (n-p)r \quad où\ p \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_n = \left(\frac{U_n + U_0}{2}\right) * \underbrace{(n+1)}_{nombre\ de\ termes}$$

Suites Géométriques :

Soit (Un) une suite géométrique :

(U_n) *est géométrique si :* $\exists q \in \mathbb{R}^* \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n * q$
q est appelée la raison de la suite

Si (U_n) *est géométrique :*
$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 * q^n = U_p + q^{n-p} \quad$ *où* $p \in \mathbb{N}$
$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_n = U_0 * \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$

Suites périodique :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite périodique de période p si :*
$\exists\ p \in \mathbb{N}^* \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+p} = U_n$

Limite d'une suite :

La suite (Un) converge vers un réel l si et seulement si, tout intervalle ouvert I contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

$$(U_n) \text{converge vers } l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0, |U_n - l| < \varepsilon$$

Si la suite ne converge pas, elle diverge.

<u>Théorème :</u>
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$*, et (Un) une suite.* *a et b désignent deux réels, (ou +∞ ou -∞). Alors :*
$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} U_n = a \\ \lim_{x\to a} f(x) = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(U_n) = b$

<u>Théorème du point fixe :</u>
Soit f une fonction continue, et (Un) une suite définie par $U_{n+1} = f(U_n), \forall n \in \mathbb{N}$*.Si la suite (Un) est convergente :*
$Si \lim_{n\to+\infty} U_n = l, alors\ f(l) = l$

Encadrement, comparaison :

Soit (Un), (Vn) et (Wn) deux suites numériques, $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0, U_n \leq V_n \\ \lim\limits_{x \to +\infty} U_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$$

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0, V_n \leq U_n \\ \lim\limits_{x \to +\infty} U_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty$$

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0, U_n \leq V_n \\ \lim\limits_{x \to +\infty} U_n = l \; et \; \lim\limits_{x \to +\infty} V_n = l' \end{cases} \Rightarrow l \leq l'$$

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0, U_n \leq V_n \leq W_n \\ \lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \lim\limits_{x \to +\infty} W_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = l$$

Théorème : $Si\ |V_n - l| \leq \varepsilon_n, avec \lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0, alors \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l$

Toute suite croissante majorée est convergente.
Toute suite décroissante minorée est convergente.

Toute suite croissante non majorée tend vers +∞

Suites adjacentes :

2 suites (Un) et (Vn) sont dites adjacentes lorsque :

→ L'une est croissante et l'autre décroissante
→ La limite de la suite (Un-Vn) est 0