Mathématiques : Similitudes du plan

Définitions :

Transformation : Toute application du plan dans bijective du plan dans lui-même.

Transformation réciproque : Application notée f^{-1} qui a tout point du plan associe son antécédent.

Isomérie : Transformation qui conserve les distances

Déplacement : Isomérie qui conserve les angles orientés

Similitude directe : Composée d'une homothétie et d'un déplacement

I) Transformation du plan :

$$f \circ f^{-1} = Id$$

Soient f, g et h trois applications du plan

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

$$f \circ Id = Id \circ f$$

$$f \circ g = g \circ f$$

$$(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

II) Transformations usuelles :

Les translations, homothéties, rotations conservent les angles orientés.

Les translations, rotations conservent les distances

Les homothéties conservent le rapport des distances

L'homothétie de rapport k multiplie les distances par |k|.

III) Similitudes directes

Les similitudes directes conservent les rapports de distance. Il multiplie donc les distances par k, k est appelé rapport de la similitude.

Les similitudes conservent les angles orientés.

Ecriture complexe :

Une similitude directe a une écriture complexe de la forme

$$z' = az + b, \text{où } a \in \mathbb{C}^* et\ b \in \mathbb{C}$$

Son rapport est |a| et son angle arg(a).

Réciproquement, toute application complexe z' = az+b est une similitude directe de rapport |a|.

Composée et réciproque :

Soit f_1 et f_2 deux similitudes directes, de rapport k_1 et k_2, d'angle θ_1 et θ_2. Alors :

F_1^{-1} a pour rapport $1/k_1$ et pour angle $-\theta_1$.

$$f_2 \circ f_1 \ a\ pour\ rapport\ k_1 k_2 et\ pour\ angle\ \theta_1 + \theta_2$$

Forme réduite :

Si s n'est pas une translation, alors l'écriture s = h∘r est appelée forme réduite de la similitude.

IV) Etude géométrique

Caractéristiques géométriques :

Soit s une similitude directe. Si s n'est pas une translation, alors s est déterminée par la donnée de son centre Ω , de son rapport k et de son angle θ .

Propriétés fondamentale :

Soient A et B deux points d'images A' et B' par une similitude directe s de rapport k et d'angle θ.

Alors,

$$\boxed{\begin{cases} A'B' = kAB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta[2\pi] \end{cases}}$$

Propriétés :

Une similitude ayant deux points fixe est l'identité du plan.

Toute similitude directe conserve :

-l’alignement
-les coefficients de colinéarité
-le parallélisme
-l’orthogonalité
-les barycentres
-les points de contact

Par une similitude de rapport k :

-L’image d’une droite est d’une droite
-L’image d’un segment [AB] est me segment [A’B’]
-L’image de la demi-droite [AB) est [A’B’)
-L’image d’un cercle de centre A et de rayon R est un cercle de centre A’ et de rayon kR.