

Mathématiques : Combinatoire

Dénombrement des listes :

Une liste est un ensemble d'éléments qui se suivent dans un ordre.

Soit un ensemble E à n éléments, une permutation de E est une liste à n éléments de E.

Permutations : Soit un ensemble E à n éléments, alors il existe **n !** permutations de E à n éléments.

Listes sans répétitions de p éléments : Soit un ensemble E de n éléments, alors il existe $\frac{n!}{(n-p)!}$ listes sans répétitions de p éléments.

Listes avec répétitions de p éléments : Soit E un ensemble de n éléments, alors il existe p^n listes avec répétitions de p éléments.

Combinaisons :

Définition : Soit E un ensemble de n éléments distincts, et p un entier, avec $0 \leq p \leq n$, alors une combinaison de p éléments de n est un sous ensemble de E qui contient p éléments. Le nombre de parties de p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ ou C_n^p

Théorème :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq n$$
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés des combinaisons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq n$$

1. $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

2. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Triangle de Pascal :

On peut calculer les combinaisons en utilisant la propriété précédente et le triangle de Pascal :

n\p	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	2	1					
4	1	3	3	1				
5	1	4	6	4	1			
6	1	5	10	10	5	1		
7	1	6	15	20	15	6	1	
8	1	7	21	35	35	21	7	1

Formule du Binôme de Nexon :

Théorème :

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Loi Binomiale :

Epreuve de Bernoulli : On appelle épreuve de Bernoulli une épreuve qui admet les deux issues suivantes : échec ou succès. Si la probabilité de succès est de p, alors la probabilité de l'échec est de 1-p. Si X est la variable aléatoire désignant le nombre de succès, alors $X \in \{0,1\}$.

Expérience de Bernoulli : Une expérience de Bernoulli consiste à répéter n fois des épreuves de Bernoulli. Ceux-ci doivent être identiques et indépendantes. Alors, si X est la variable aléatoire désignant le nombre de succès, la loi de probabilité de X suit la loi binomiale.

Loi Binomiale : On répète n fois une expérience de Bernoulli, soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de succès, alors :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$