Mathématiques : Logique

<u>Propositions logiques :</u>

Une assertion est une affirmation à laquelle on peut, sans ambiguïté, attribuer la valeur vraie ou la valeur fausse.

Une proposition satisfait nécessairement les lois suivantes :

<u>Le principe du tiers exclu</u> : Une proposition est nécessairement vraie ou fausse

<u>Loi de non contradiction</u> : Une proposition ne peut pas être à la fois vraie ou fausse

Une proposition ne peut prendre donc qu'une seule des deux valeurs suivantes : VRAI ou FAUSSE.

<u>Opérateur Logiques (Tables de vérité) :</u>

<u>Opérateur NON :</u>

L'opérateur NON indique la négation. NON A est vraie si et seulement si A est fausse.

P	$\overline{\boldsymbol{P}}$
V	F
F	V

<u>Opérateur ET :</u>

L'opérateur ET indique la conjonction. A ET B est vraie si et seulement si A est vraie et B est vraie.

P	***Q***	***P ET Q***
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Opérateur OU :

L'opérateur OU indique la disjonction. A OU B est vraie si l'une des deux propositions est vraie.

P	***Q***	***P OU Q***
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Opérateur $\Longrightarrow$

L'opérateur $\Longrightarrow$ indique l'implication. A$\Longrightarrow$B est vraie si lorsque A est vraie, B est vraie. Si A est fausse, A$\Longrightarrow$B est fausse.

P	***Q***	***P*** $\Longrightarrow$ ***Q***
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Opérateur $\Leftrightarrow$

L'opérateur $\Leftrightarrow$ indique l'équivalence. P$\Leftrightarrow$Q est vraie que si P et Q ont les mêmes valeurs d'unité.

P	***Q***	***P*** $\Leftrightarrow$ ***Q***
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Opérateur Logiques (Tables de vérité) :

P$\Leftrightarrow$Q équivaut à (P$\Longrightarrow$Q et Q$\Longrightarrow$P)

P$\Longrightarrow$Q équivaut à $\bar{P} \Longrightarrow \bar{Q}$

$\overline{P \Longrightarrow \mathrm{Q}}$ équivaut à (P et $\bar{Q}$)

$\overline{P \text{ et } \mathrm{Q}}$ équivaut à ($\bar{P}$ ou $\bar{Q}$)

$\overline{P \text{ ou } \mathrm{Q}}$ équivaut à ($\bar{P}$ et $\bar{Q}$)

Différents types de raisonnements :

Le contre-exemple : Pour montrer qu'une proposition de la forme « Quel que soit x » est fausse, il suffit de montrer que sa négation « il existe x » est vraie. C'est le principe du contre-exemple.

Exemple : Pour prouver que la proposition « Tous les nombres de la forme « n^2+1 » est un nombre premier » est fausse, on peut donner l'exemple de $10 = 3^2+1$

La contraposée : Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ est vrai, on peut montrer que $\bar{P} \Longrightarrow \bar{Q}$ est vraie (en effet, les deux propositions sont équivalentes).

Exemple : Pour prouver que si n^2 est pair, alors n est pair, on peut prouver que si n est impair, alors n^2 est impair.

Le raisonnement par l'absurde : Pour montrer que P est vrai, on peut aussi montrer que $\bar{P}$ est fausse. (Ces deux propositions sont également équivalentes).

Exemple : Pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnelle, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnelle, et on arrive à une contradiction.

Le raisonnement par l'absurde : Pour montrer une proposition du type : « pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, une propriété P(n) est vraie, on peut appliquer un raisonnement par récurrence :

1. *Initialisation* :	$P(n_0)$ est vraie
2. *Hérédité :*	$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ pour tout n supérieur à n_0
3. *Conclusion :*	Ainsi, quel que soit n supérieur à n_0, P(n) est vraie.