Mathématiques : Calcul d'intégration

I) Intégration d'une fonction continue

Fonction positive :

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle [a ;b], et soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonale $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Alors, l'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire sous la courbe, mesurée en u.a, et est notée : $\int_a^b f(x)dx$

Fonction négative :

Soit f une fonction continue et négative sur l'intervalle [a ;b], et soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonale $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Alors, l'intégrale de a à b de la fonction f est **l'opposée de** l'aire du domaine d »limitée par C, (Ox), et les droites d'équations x=a et x=b, mesurée en u.a, et est notée : $\int_a^b f(x)dx$.

Fonction quelconque :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a ;b] et de signe quelconque, et soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonale $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Alors, l'intégrale de a à b de la fonction f est **l'opposée de** l'aire du domaine délimitée par C, (Ox), et les droites d'équations x=a et x=b, mesurée en u.a, et est notée : $\int_a^b f(x)dx$.

L'intégrale de a à b de f est égale à la somme des aires des parties situées au-dessus de (Ox) diminuée de celles situées en dessous de (Ox).

Valeur moyenne de f sur [a ;b] :

Soit f une fonction continue sur [a ;b] (a<b), la valeur moyenne de f sur [a ;b] est le réel :

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Propriétés de l'intégrale :

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et a,b,c trois réel de I, et soient α et β 2 réels constantes.

Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Positivité & ordre:

$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b,$

$$\forall x \in [a; b], f(x) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$$

$$\forall x \in [a; b], f(x) < g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

$$\forall x \in [a; b], m < f(x) < M \Rightarrow < m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < M$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Primitive d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, alors on appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I tel que F'=f

Si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions G tel que G = F+k, k∈ℝ .

On a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Fonction (x→…)	Définie sur	Primitive
$x \to n$	$\mathbb{R}$	$x \to k$
$x \to x^n$	$\mathbb{R}$	$x \to \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$
$x \to \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to \ln\lvert x\rvert + k$
$x \to \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + k$
$x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+$	$x \to \sqrt{x} + k$
$x \to \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \to \sin(x) + k$
$x \to \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \to \cos(x) + k$

$$f: x \to x^n \Rightarrow F: x \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Intégrations par parties :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continue sur I.

Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Intégrales à bornes infinies :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$, Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$$

Si F admet une limite quand $x \to +\infty$, on note

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_\alpha^\infty f(t)dt$$