Mathématiques : Les Complexes

I) Présentation :

*On appelle nombre complexe un nombre imaginaire de la forme a+ib où a et b sont des réels et **i** le nombre complexe tel que $i^2=-1$*

Ensemble $\mathbb{C}$

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes tel que :

- $\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$
- *$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui ont les mêmes propriétés que $\mathbb{R}$*

Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de la forme $z = \mathrm{a} + \mathrm{ib}$ où a et b sont réels.
On appelle a la partie réelle de z, notée a=Re(z) et b sa partie imaginaire, notée b=Im(z)

Opérations

Soit z et z' deux complexes, tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

Alors :

$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Inverse

Tout nombre z admet un inverse Z tel que zZ = 1. Z est définie par :

$$Z = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

On note $Z = \frac{1}{z}$

De plus, $\frac{z}{z'} = z * \frac{1}{z'}$

Conjugué

Soit z$\in$ $\mathbb{C}$, avec z=a+bi.

$$On\ note\ conjugué\ de\ z\ le\ nombre\ noté\ \bar{z}, définie\ par\ \bar{z} = a - bi$$

Représentation graphique :

Si on se donne un repère orthonormal direct, on peut associer à chaque point M du plan de coordonnées (a,b) le complexe z = a+bi. Z est l'affixe du point M, il s'agit aussi de l'affixe du point OM.

Réciproquement, à chaque complexe, il est possible d'associer un point du plan.

On parle alors de plan complexe.

Module

Soit z=a+bi un nombre complexe, et M le point d'affixe z. Alors, le module de z, noté $|z|$, qui correspond aussi à la distance OM, vaut $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriétés :

On a $z\bar{z} = |z|$

$$On\ a : \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Equations dans $\mathbb{C}$

Pour résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$, on procède exactement de la même manière que dans $\mathbb{R}$. On calcule le discriminant Δ, et si celui-ci est inférieur à 0, on prend sa racine (qui est un nombre complexe), et on trouve les deux solutions qui sont

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ou\ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$